

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (5+5 Pkt.): Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für welche die Determinante der folgenden Matrizen gleich Null ist:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 5\alpha \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} e^{3\beta} & 0 & -e^\beta \\ 0 & 8 & 0 \\ e^{-2\beta} & 0 & e^{-4\beta} \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (10 Pkt.): Gegeben seien die Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Definiere einen neuen Vektor $a \times b \in \mathbb{R}^3$ durch

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\det(a, b, c) = (a \times b)^T c$, wobei (a, b, c) die 3×3 -Matrix mit a, b, c als Spalten bezeichne.

Aufgabe 3 (jeweils 2 Pkt.): Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -3/7 & 5/7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 11 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

(e) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (Multiple Choice, 2+2+3+3 Pkt.): Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\det \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^3$.

(b) Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(c) Alle Elementarmatrizen sind invertierbar.

(d) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in Zeilenstufenform ist genau dann invertierbar, wenn sie keine Nullspalte hat.

Abgabe: In den entsprechenden Zettelkasten gegenüber vom Raum 25.22.00.58 bis Mi., 27.05.2026, 10:00 Uhr.

Besprechung: In der Übung am Mi., 27.05.2026.